SUMA+ 63
Febrero 2010, pp. 75-82

Actividades TIC de aplicación directa al aula

Existe una gran cantidad de páginas web que nos ofrecen herramientas concretas para poder utilizarlas directamente en el aula de matemáticas, pero también podemos localizar webs que ofrecen un auténtico arsenal de recursos que nos pueden ser útiles para los distintos niveles educativos. De entre esas últimas, vamos a destacar en este número de *SUMA* la web cuya dirección es

www.ematematicas.net

En la imagen 1 podemos observar la web.

Como vemos, encontramos gran cantidad de recursos, ejercicios y actividades que podemos utilizar en nuestra clase. Están pensados para secundaria, como el que podemos observar en la imagen 2 para la parábola.

Según se aprecia en la página, los ejercicios están clasificados atendiendo a los distintos cursos de la ESO y bachillerato. La web nos presenta múltiples actividades interactivas clasificadas, pero aquí no radica el mayor potencial de esta web que está pensada para la utilización directa en el aula. Como podemos contemplar en la parte superior izquierda de la página, se permite que los visitantes se puedan dar de alta en el portal como usuario o como profesor.

Si un usuario se da de alta como profesor, se le ofrece la posibilidad, una vez que entra, de dar de alta en el portal a sus alumnos. Así, podrá asignarles ejercicios de los que se encuentran recogidos en la web para que los vayan realizando, permitiendo hacer un seguimiento individualizado de cada uno de los alumnos.

El portal diseñado por el profesor Miguel Pino ofrece una gran cantidad de posibilidades y recursos que podemos utilizar en los distintos cursos de secundaria.

Cálculo simbólico III: Ejemplos con Wxmaxima

El contenido de esta sección en los dos números anteriores de *SUMA* ha girado alrededor del funcionamiento de Maxima y de la aplicación complementaria Wxmaxima. Ahora nos planteamos mostrar algún ejemplo en el que podamos observar la utilización de esta potente herramienta. Para ello hemos seleccionado dos ejercicios, uno del bloque de álgebra y otro del bloque de análisis que vamos a resolver paso a paso con Wxmaxima.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Imagen 1: el portal de Ematemáticas

Ejemplo 1

El primer ejemplo que hemos seleccionado es la aplicación del Teorema de Rouche-Frobenius para investigar sobre las soluciones de un sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro. En nuestro ejemplo, el sistema seleccionado es:

$$z + y + ax = 1$$
$$z + ay + x = a$$
$$az + y + x = a^2$$

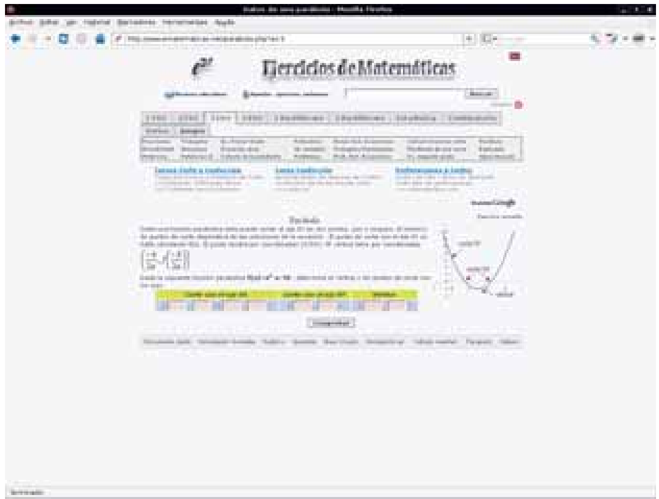

Imagen 2: ejercicio sobre la parábola

Para comenzar deberíamos tener la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada de dicho sistema.

Lo primero que vamos a hacer en Wxmaxima es introducir la matriz de coeficientes que vamos a denominar M(a) ya que depende del parámetro "a". La matriz de los coeficientes la vamos a poder introducir de dos formas distintas:

1. La primera forma va a ser utilizando un comando de Maxima. Para ello, sobre la línea de comandos de Wxmaxima escribiríamos:

   M(a):= matrix([a,1,1], [1,a,1], [1,1,a])

   Posteriormente pulsamos Enter. Así obtendríamos la matriz que contemplamos en la imagen 3.

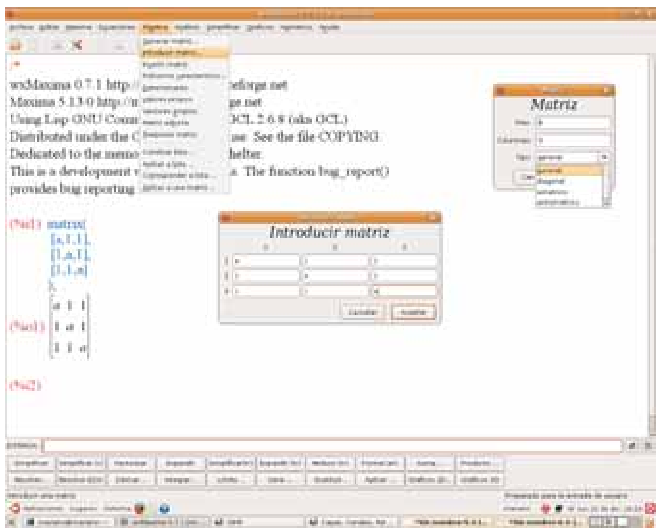

Imagen 3: introducción de una matriz en Wxmaxima

2. La segunda forma sería utilizando el entorno gráfico de Wxmaxima. Para ello escribimos sobre la línea de comandos de Wxmaxima

   M(a):=

   Posteriormente pulsamos sobre la opción "Introducir matriz" del menú "Álgebra". Si realizamos esta acción se abre una ventanita en la que debemos indicarle a la aplicación el número de filas y de columnas que tiene la matriz. Esta ventanita la observamos en la imagen 3. Una vez introducidos estos datos, pulsamos el botón "Aceptar" y nos aparece una nueva ventanita como muestra la imagen 3, en la que observamos claramente las posiciones en las que introducir los distintos elementos que componen nuestra matriz. Cuando hayamos escrito todos los coeficientes de la misma debemos pulsar "Aceptar" y ya habríamos introducido nuestra matriz.

Ésta será la salida (%o1) de nuestra sesión en Wxmaxima.

Ahora debemos introducir la matriz ampliada de nuestro sistema de ecuaciones. En este caso la vamos a denominar MB(*a*). Para introducirla podemos hacerla de tres formas distintas:

1. Introducimos la matriz de los coeficientes utilizando directamente el comando de Maxima. En este caso sería

MB(*a*):= matrix([1,-1,0,*a*], [1,0,*a*^2,2***a*+1], [1,-1,*a**(*a*-1),2**a*])

2. Introducimos la matriz de los coeficientes utilizando Wxmaxima tal y como hemos indicado en el punto segundo al introducir la matriz de los coeficientes.

3. Podemos aprovechar que ya hemos introducido la matriz de los coeficientes, M(*a*), para introducir la matriz ampliada con un comando de Maxima que lo que hace es añadir una columna más a una matriz previamente introducida. Este comando sería:

   addcol(M(*a*), [1,*a*,*a*^2])

Cualquiera que sea el método que utilicemos, obtendremos la matriz ampliada MB(*a*). En nuestro caso la matriz obtenida será la salida (%o2).

Ahora calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes, para ello podemos utilizar dos formas distintas.

1. La primera de ellas sería hacerlo utilizando directamente el comando que calcula el determinante de una matriz. En este caso, como la matriz sería M(*a*), el comando que utilizaríamos sería

   determinat(M(*a*))

2. Otra forma sería utilizar directamente el entorno gráfico Wxmaxima. Para ello volvemos a escribir la matriz de la que deseamos calcular el determinante. En nuestro caso no necesitamos escribir todos los coeficientes, basta con escribir el nombre que le habíamos asignado anteriormente, es decir M(*a*) y pulsamos "Enter". Una vez que aparece la matriz, pulsamos la opción "determinante" del menú "Álgebra" de Wxmaxima.

En la imagen 4 podemos observar la pantalla que deberíamos tener si lo hemos realizado utilizando el segundo método.

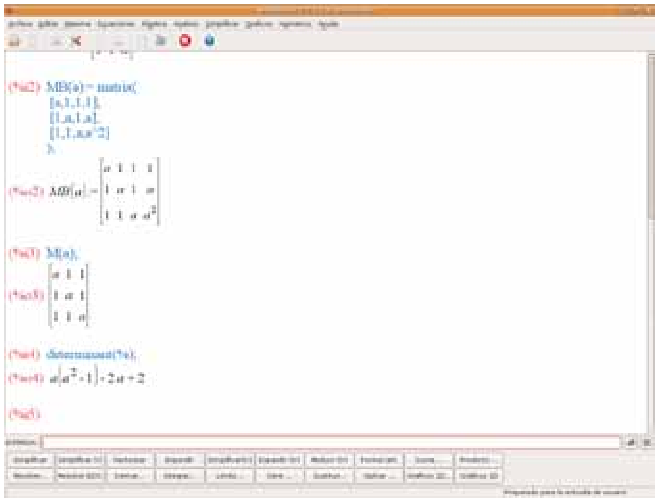

Imagen 4: cálculo del determinante con Wxmaxima

Utilicemos el método que utilicemos, obtendremos el determinante de la matriz que es el que observamos en la imagen 4:

$$a\left(a^2-1\right)-2a+2$$

Este determinante será la salida (%o3) si lo hacemos por el método 1 y será (%o4) si lo hacemos por el método 2, de la sesión de Wxmaxima. Para continuar con nuestro desarrollo vamos a suponer que lo hemos realizado con el método 2.

Ahora vamos a calcular los valores del parámetro a que anulan el determinante que hemos calculado. Para ello, puesto que el determinante es la salida (%o4), podemos hacerlo nuevamente por dos métodos, uno con el comando directo de Maxima y otro utilizando Wxmaxima. A partir de aquí vamos a utilizar solamente Wxmaxima siempre que sea posible.

Para calcular los valores del parámetro a pulsamos en la opción "Resolver" del menú "Ecuaciones". Realizando esta acción, aparece un pequeña ventana en la que se nos pedirá la ecuación y la variable. En nuestro caso, la ecuación es

%o4=0

y la variable es a. Si realizamos esta operación nos dará como resultado

$$[a=-2, a=1]$$

Estas soluciones las observamos en la imagen 5. Con estas acciones que hemos efectuado identificamos tres casos posibles:

Caso 1: Si $a=-2$

En este caso sabemos que el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Debemos calcular el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada para estudiar este caso.

Lo primero que hacemos es calcular el rango de la matriz de los coeficientes. En este caso debemos hacerlo utilizando un comando de Maxima. Debemos tener en cuenta que el valor del parámetro a es ahora -2, para ello teclearemos en la línea de comandos

rank(M(–2))

y obtendremos que el rango es 2 según observamos en la imagen 5.

Ahora calculamos el rango de la matriz ampliada. Procedemos de la misma forma que con la matriz de los coeficientes, escribiendo el comando de la siguiente forma

rank(MB(–2))

En la imagen 5 observamos que el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que podemos deducir en este caso que el sistema es incompatible.

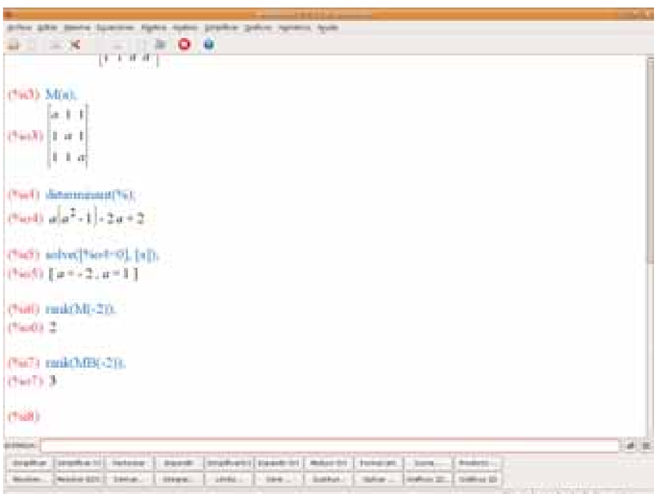

Imagen 5: cálculo del rango de una matriz

Caso 2: Si a=1

Procedemos como en el caso anterior, calculando los rangos de las matrices M(1) y MB(1). En este caso, el rango de ambas matrices nos resulta que es 1 según observamos en la imagen 6, por lo que el sistema, para $a=1$, es compatible indeterminado, debiendo calcular el valor de una de las variables en función de las otras dos.

En nuestro caso planteamos un nuevo sistema a resolver en el que asignamos a la variable x el valor "p", a la variable y el valor "q" y la última ecuación sería cualquiera de las del sistema que estamos resolviendo con $a=1$. En nuestro caso el sistema nos quedaría de la forma

$$\begin{aligned} x &= p \\ y &= q \\ z + y + x &= 1 \end{aligned}$$

Para resolverlo con Wxmaxima pulsamos sobre la opción "Resolver sistema lineal" del menú "Ecuaciones" tal y como observamos en la imagen 6. Al pulsar sobre esta opción aparece una pequeña ventana que observamos en la imagen 6, en la que nos piden que indiquemos el número de ecuaciones que tiene el sistema. En nuestro caso 3. Tras escribir este dato, nos aparece otra nueva ventana, que también observamos en la imagen 6, en la que nos solicitan que escribamos las ecuaciones y las variables separadas por comas.

Al pulsar sobre el botón "Aceptar", Wxmaxima resolverá el sistema como podemos observar en la imagen 6.

En este caso la solución del sistema es

$$[x=p, y=q, z=-p-q+1]$$

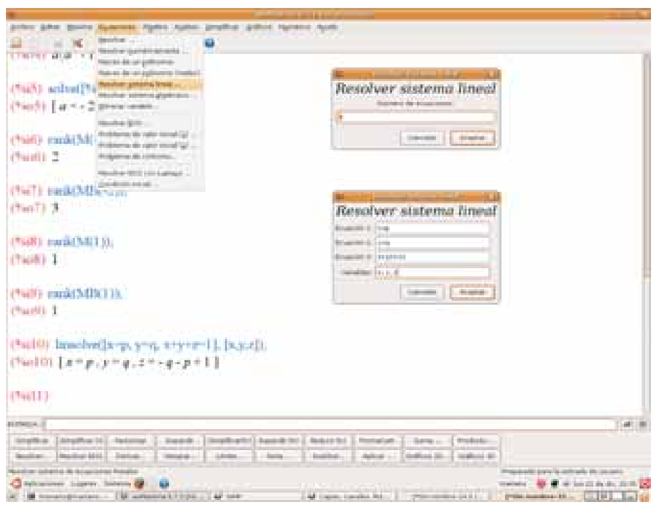

Imagen 6: resolución del sistema incompatible indeterminado

Caso 3: el parámetro a es distinto de –2 y de 1

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no se anula y por lo tanto el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual que el de la matriz ampliada, de lo que se deduce que el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Procedemos a calcular ahora esa única solución que tiene el sistema. Este cálculo lo podemos hacer de varias formas. De entre ellas nosotros indicamos dos:

1. La primera forma sería mediante la opción “Resolver sistema lineal” del menú “Ecuaciones”. En este caso el procedimiento a seguir sería el mismo que el utilizado en el caso 2 cuando el parámetro *a* valía 1, pero utilizando las ecuaciones del sistema original que estamos estudiando.

2. La segunda forma sería siguiendo los siguientes pasos:

   2.1. Introducimos la matriz 3×1 del término independiente del sistema. Esta matriz la introducimos, al igual que hicimos con la matriz de los coeficientes y la ampliada, pulsando sobre la opción “Introducir Matriz” del menú “Álgebra”. Esto nos produce la salida (%o16)

   2.2. Volvemos a escribir en la línea de comandos M(*a*) para que volvamos a tener en la pantalla la matriz de los coeficientes. Esto nos produce la salida (%o17)

   2.3. Pulsamos ahora sobre la opción “invertir matriz” del menú “Álgebra”. Al realizar esa acción, Wxmaxima calcula la matriz inversa de la anterior M(*a*), es decir, de la de coeficientes. Con esto obtenemos la salida (%o18)

   2.4. Calculamos ahora el producto de las dos matrices anteriores en el orden correspondiente, es decir (%o18) multiplicada por (%o16). En este caso, el producto de matrices se realiza mediante un punto, colocando un espacio antes y después del punto. En nuestro caso sería

   %o18 . %o17

   Esto nos produce la salida (%o19) que no está simplificada como observamos en la imagen 7.

   2.5. Nos queda ahora simplificar la solución anterior. Para ello pulsamos sobre la opción “Simplificar expresión” del menú simplificar, obteniendo la salida (%o20) que observamos en la imagen 7.

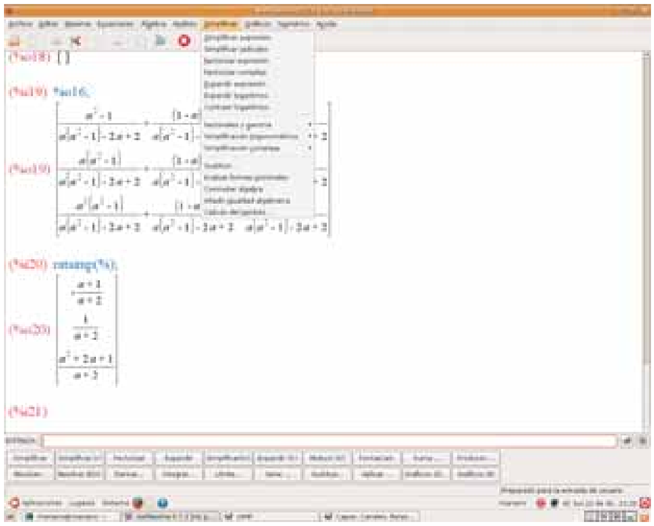

Imagen 7: resolución del sistema compatible determinado

Realizando estos pasos hemos realizado el estudio completo del sistema inicial que depende del parámetro *a*, calculado en cada uno de los posibles casos la solución correspondiente.

Ejemplo 2

En este segundo ejemplo nos planteamos realizar un estudio de una función que deseamos representar. Dominio, continuidad, corte con los ejes, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento y representación, son los puntos que nos planteamos abordar de forma que contemplemos la utilización de algunas partes de Wxmaxima.

En este caso la función que nos plateamos estudiar es la siguiente

$$f(x) := \frac{3x^3 - 18x^2 - 81x + 420}{2x^2 - 6x - 20}$$

Vamos a realizar un estudio de la función anterior siguiendo cada uno de los puntos anteriormente recogidos. Lo primero que vamos a hacer es introducir la función en Wxmaxima definiéndola como *f*(x), para ello escribimos en la línea de comandos la siguiente expresión:

f(*x*):=(3**x*^3-(18)**x*^2-81**x*+420)/(2**x*^2-6**x*-20)

Al pulsar “Enter” observaremos que en la pantalla aparece nuestra función. Recordemos que para definirla debíamos introducir “:=”. Así tenemos nuestra función en la salida (%o1).

1. Comenzamos con el dominio de la función. Puesto que es una función racional en la que tanto el numerador como el denominador son polinomios, el dominio de dicha función serán todos los valores reales excepto aquellos que anulen el denominador. Para ello escribimos el denominador en la línea de comandos y pulsamos “Enter”, obteniendo el denominador como la salida (%o2).

   Ahora, en el menú “Ecuaciones” seleccionamos la opción “Raíces de un polinomio” como podemos observar en la imagen 8. Como observamos en esa misma imagen, las raíces del polinomio son el –2 y el 5, por lo que podemos deducir que el dominio de la función son todos los valores reales excepto el –2 y en el 5.

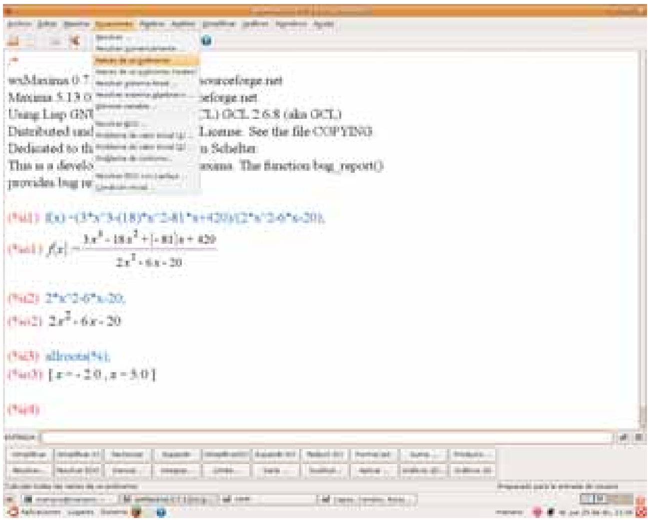

Imagen 8: valores que anulan el denominador

2. Ahora vamos a estudiar la continuidad de la función. Dada la forma que tiene, podemos decir que la función es continua en todos los valores reales excepto en el –2 y en el 5, valores en los que deberíamos estudiar el tipo de discontinuidad que presenta.

   2.1. Comenzamos con el valor x=–2. Sabemos que no existe f(–2), por lo que vamos a estudiar los límites laterales. Lo primero que hacemos es volver a recuperar la función. Para ello escribimos $f(x)$ en la línea de comandos y pulsamos “Enter”. Así nos aparece la salida (%o4) que es nuestra función.

   Para calcular los límites laterales pulsamos ahora sobre la opción “Calcular límite” del menú “Análisis” de Wxmaxima, apareciéndonos un pequeña ventana como la que observamos en la imagen 9. En ella seleccionamos la función de la que queremos calcular el límite, el valor al que se va a acercar la variable e indicamos la variable. Para finalizar seleccionamos si deseamos calcular el límite superior, el inferior o ambos.

   En nuestro caso, tanto el límite superior como el inferior en –2 nos indican “und” en este caso Infinito. Para conocer más del límite, hemos calculado el valor de la función en –1,999999 y en –2,000001 tal y como observamos en la imagen 9, por lo que podemos deducir que por la izquierda se aleja a infinito positivo y por la derecha se aleja a infinito negativo, por tanto en x= –2 hay un discontinuidad de salto infinito.

   2.2. Continuamos con el valor x=5. Sabemos que no existe f(5), por lo que vamos a estudiar los límites laterales. Nuestra función la seguimos teniendo en la salida (%o4).

Imagen 9: estudio de la continuidad

   Para calcular los límites laterales pulsamos ahora sobre la opción “Calcular límite” del menú “Análisis” de Wxmaxima, apareciéndonos un pequeña ventana como la que observamos en la imagen 9. En ella seleccionamos la función de la que queremos calcular el límite, el valor al que se va a acercar la variable e indicamos la variable. Para finalizar seleccionamos si deseamos calcular el límite superior, el inferior o ambos.

   En nuestro caso, tanto el límite superior como el inferir en –2 nos indican “und” en este caso Infinito. Para conocer más del límite, hemos calculado el valor de la función en 4,999999 y en 5,000001, pudiendo deducir de forma análoga a como hicimos anteriormente que por la izquierda se aleja a infinito positivo y por la derecha se aleja a infinito negativo, por tanto en x=–2 hay un discontinuidad de salto infinito.

3. Calculamos ahora el corte con los ejes.

   3.1. Corte con el eje *OX*. Para ello debemos resolver la ecuación que resulta de igualar la función a cero. En nuestro caso pulsamos sobre la opción “Resolver” del menú “Ecuaciones” de Wxmaxima. Con esta acción nos aparece una pequeña ventana que observamos en la imagen 10 en la que debemos indicar la ecuación, en nuestro caso

   %o4=0

   y la variable que en nuestro caso es *x*. Al pulsa sobre el botón “Aceptar” nos aparece que

   $[x=7, x=4, x=-5]$

   tal y como observamos en la imagen 10, por lo que deducimos que la función corta el eje OX en los puntos (–5,0), (4,0) y (7,0).

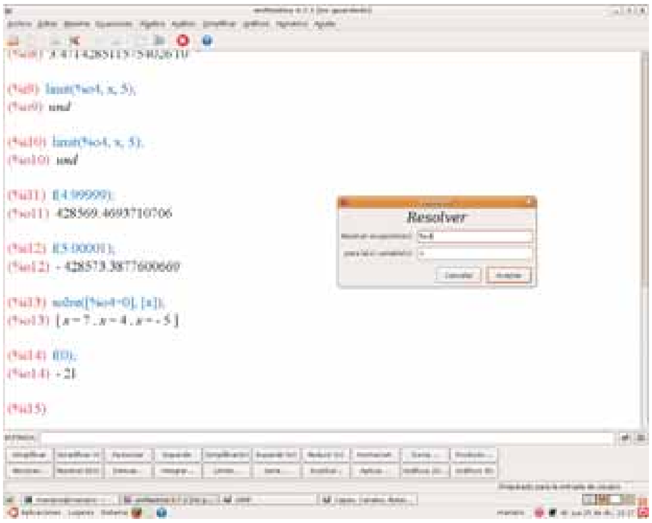

Imagen 10: cortes con los ejes

   3.2. Corte con el eje *OY*. Para ello debemos calcular el valor de la función para *x*=0. Solamente debemos escribir en la línea de comandos

   $f(0)$

   ya que lo primero que hicimos fue definir la función. En nuestro caso nos proporciona la salida (%o14) tal y como observamos en la imagen 10 que nos indica que la función corta al eje *OY* en el punto (0,–21).

4. Máximos y mínimos. Para ello vamos a calcular primero la derivada de nuestra función. En nuestro caso seleccionamos la opción “Derivar” del menú “Análisis” y nos aparece una pequeña ventana como la que observamos en la imagen 11. En esa ventana le indicamos que la expresión que deseamos derivar es %o4 y que la variable respecto a la que deseamos derivarla es *x*. En el número de derivada seleccionamos la 1. Si pulsamos el botón “Aceptar” obtenemos el resultado de la derivada que se observa en la imagen 11. Si deseamos simplificarla pulsamos sobre la opción “Simplificar expresión” del menú “Simplificar” de Wxmaxima.

   Ahora vamos a calcular los valores que anulan esta derivada. Procedemos como en pasos anteriores pulsando sobre la opción “Resolver” del menú “Ecuaciones”. En la ventana que aparece le indicamos que la ecuación que deseamos resolver es

   %o15=0

   la variable sigue siendo *x*. Para este ejemplo los valores en los que se anula la derivada son valores complejos como observamos en la imagen 11 (recordemos que %i indicaba el complejo puro) por lo que podemos deducir que la función no tiene máximos ni mínimos.

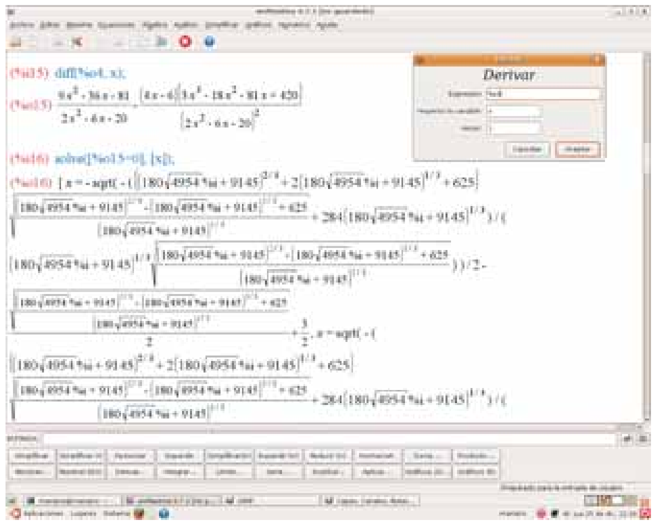

Imagen 11: cálculo de extremos

5. Ahora estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función. Para realizar este estudio calculamos la derivada de $f(x)$. Escribimos en la línea de comandos

   $h(x):=$

   Pulsamos sobre la opción “Derivar” del menú “Análisis” de Wxmaxima. En la pequeña ventana que aparece le indicamos que la expresión que deseamos derivar es %o4, que la variable es “x” y que la derivada que deseamos calcular es la primera. De esta forma ya tenemos definida h(*x*) como la derivada segunda de $f(x)$.

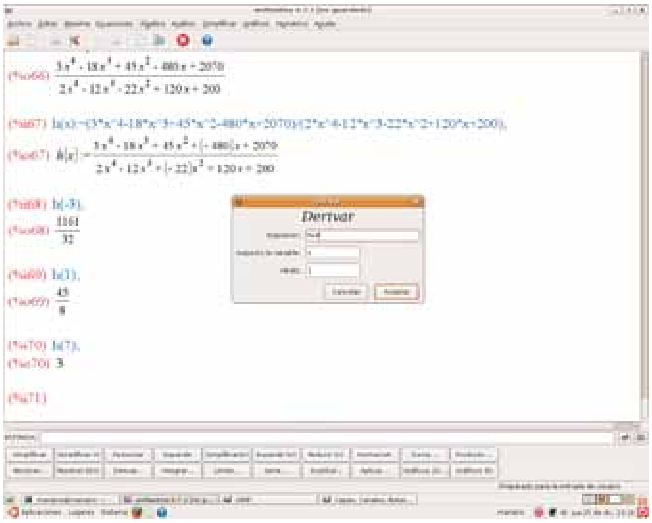

Imagen 12: estudio del crecimiento y del decrecimiento

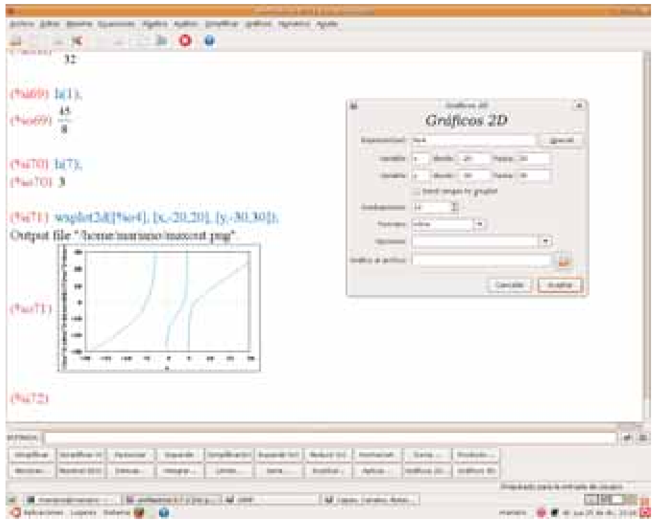

Imagen 13: representación gráfica

Ahora vamos a calcular el signo de esa derivada antes del valor –2, entre –2 y 5 y también después del valor 5. En la imagen 12 podemos observar cómo hemos calculado $h(-3)$, $h(1)$ y $h(7)$, obteniendo los signos +, + y + respectivamente, por lo que podemos deducir que la función $f(x)$ es creciente en todos los intervalos.

6. Para finalizar vamos a representar gráficamente la función. Con Wxmaxima es tan sencillo como pulsar sobre la opción "Gráficos 2D" del menú "Gráficos". Nos aparece una nueva ventana en la que debemos indicar varios datos:

   - Expresión que deseamos representar. En nuestro caso %o4
   - Intervalo en el que se va a mover la variable x. En nuestro caso [–20, 20]
   - Intervalo que deseamos contemplar del eje y. En nuestro caso [–30,30]
   - Graduaciones para las marcas de los ejes.
   - Formato. Nosotros vamos a elegir "Inline", aunque la mejor representación se observa con gnuplot.

En la imagen 13 podemos observar la representación que ha realizado la aplicación Wxmaxima de la función que estábamos estudiando.

Con esto ya tendríamos completado el estudio inicial que nos habíamos propuesto.

Con estos dos ejemplos concluimos el recorrido con el que pretendíamos dar a conocer más características de la aplicación Wxmaxima y del potencial que se oculta bajo Maxima.

MATEMASTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	WxMaxima
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o http://maxima.sourceforge.net
Licencia	GPL
Contenido	Cálculo simbólico.
Nivel	Multinivelar: 4º ESO, Bachillerato y Universidad.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 4º de ESO. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación como herramienta de ayuda para la resolución de problemas y tareas matemáticas