SUMA 46
Junio 2004, pp. 71-77

Las cónicas: método de aprendizaje *constructivo*

Este trabajo pretende plasmar el estudio de las cónicas como formas geométricas que se pueden generar de múltiples formas y que verifican propiedades que son utilizadas en la vida cotidiana. Debido al nivel en el que se imparte este tema, 4º de ESO, nos hemos centrado en la distinción a partir de la generación y características de cada cónica. Para llevar a cabo esta tarea se han utilizado elementos manipulables, algunos de los cuales pueden ser generados por los propios alumnos, para asentar mejor en ellos las distintas definiciones y propiedades.

This paper tries to present the study of conic sections as geometrical shapes which can be generated in many ways and that verify properties which are used in daily life. Due to the level at which this subject is taught, the last year of compulsory secondary education (4th ESO.) we have focused our attention on distinction starting from the generation and the characteristics of each conic. To carry out this task different manipulable elements have been used, some of which can be created by the students themselves, in order to better consolidate the different definitions and properties.

Los conocimientos sobre las cónicas, con los que los alumnos llegan a cuarto de ESO se limitan a la representación en el plano de algunas de ellas, como formas geométricas, siendo la circunferencia la más utilizada. En este nivel se le explica que estas cónicas, algunas de las cuales no conocen, se generan al cortar un cono con un plano en distintas posiciones y, para explicárselo, se usa el típico dibujo de un cono cortado por varios planos, encontrándose los alumnos con un dibujo de difícil interpretación espacial, siendo imposible esta interpretación para los alumnos que carecen de visión espacial.

Una vez *vistas* las cónicas de forma geométrica, procedemos a definírselas como puntos del plano que verifican una propiedad común. Posteriormente de cada cónica se ven una serie de características que a los alumnos les cuesta relacionar con su cónica correspondiente. Si a esto le añadimos que la generación de cada cónica depende de una serie de puntos y medidas que los alumnos deben conocer, podemos observar el cóctel de características y definiciones que los alumnos deben asimilar a través de un dibujo que generalmente no saben interpretar.

Teniendo en cuenta que la resolución e interpretación de problemas relacionados con las cónicas a través de sus ecuaciones, en cursos superiores, depende en un porcentaje muy alto, de la interpretación y la realización del dibujo con los datos y características que el problema nos plantee, nuestro reto está claro: debemos intentar que los alumnos comprendan, representen y distingan cada una de las cónicas y sus distintas propiedades.

La realización de los distintos aparatos que se citan a lo largo del trabajo, han venido motivados por el interés que los alumnos mostraban por ellos y lo que les facilitaba la comprensión de cada uno de los distintos conceptos.

Desarrollo del trabajo

Generación de las cónicas

Las distintas cónicas se generan al cortar un cono con un plano, haciendo variar el ángulo de inclinación del plano con respecto al eje del cono.

Para que este proceso sea asimilado de forma visual por los alumnos, se ha utilizado el visor de cónicas (ver foto 1). Este aparato ha sido creado utilizando dos embudos negros en el

Mariano Real Pérez
IES Suárez de Figueroa (Fuente de Cantos - Badajoz).

interior de los cuales se ha colocado una bombilla y se han dispuesto sobre un eje de forma que al encender las bombillas se observe un cono generado por un haz de luz.

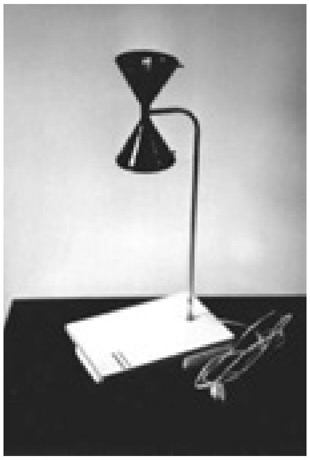

Foto 1. Generador de cónicas

Una vez que tenemos el cono ya sólo tenemos que cortarlo con un plano; para ello nos valemos de una madera rectangular, pudiéndose obtener:

a) La circunferencia: Para generar la circunferencia, cortamos el cono luminoso con la madera perpendicularmente al eje del cono. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una circunferencia (ver foto 2). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es un punto, que es la cónica degenerada de la circunferencia.

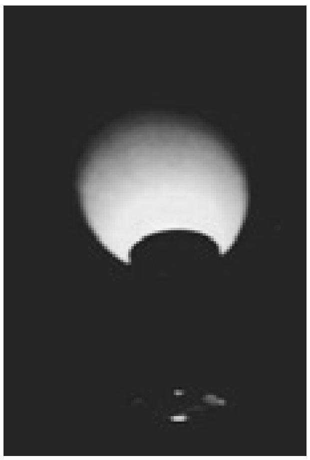

Foto 2. Generación de una circunferencia

b) La elipse: Para generar la elipse, cortamos el cono luminoso con la madera formando con el eje del cono un ángulo superior al que forma la directriz del cono con el eje. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una elipse (ver foto 3). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es un punto que es la cónica degenerada de la elipse.

Foto 3. Generación de una elipse

c) La parábola: Para generar la parábola, cortamos el cono luminoso con la madera formando ésta con el eje del cono un ángulo igual que el que forma la directriz con dicho eje. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una parábola (ver foto 4). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es una recta que es la cónica degenerada de una parábola.

Foto 4. Generación de una parábola

d) La hipérbola: Para generar la hipérbola, cortamos el cono luminoso con la madera formando con el eje del cono un ángulo inferior al que forme la directriz con el eje del cono. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una hipérbola (ver foto 5). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es un par de rectas secantes, que es la cónica degenerada de la hipérbola.

Tratamiento particular de cada cónica

La Circunferencia

Despues de haber generado la circunferencia como corte de un cono con un determinado plano, la definiremos como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan, una distancia llamada radio, de un punto fijo llamado centro (J. M. Arias 1996).

Foto 5. Generación de una hipérbola

Ahora pasaremos a generar la circunferencia de tres formas diferentes, utilizando propiedades de ésta:

- Generación de una circunferencia como envolvente de sus tangentes.

Consideremos dos circunferencias concéntricas *C* y *C’* de radios *R* y r (*r*<*R*) respectivamente. Si trazamos rectas tangentes a *C’*, observamos que estas rectas generan en *C* cuerdas que son de igual longitud (Ver gráfico 1).

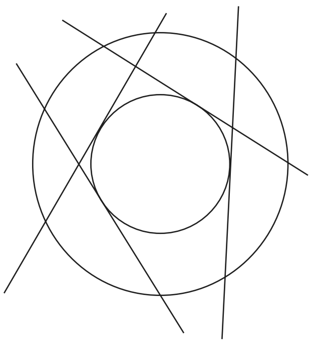

Gráfico 1

La anterior propiedad la vamos a utilizar de forma inversa para generar una circunferencia. Partimos de una circunferencia y trazamos en ella cuerdas de igual longitud. La curva envolvente de estas cuerdas es una circunferencia. El anterior proceso se puede hacer de forma manipulable según describimos a continuación: en una madera trazamos una circunferencia y cada ángulo de 10º clavamos una puntilla; una vez clavadas las 36 puntillas, atamos un hilo a una de ellas y lo llevamos a cada una de las otras de siete en siete por ejemplo, hasta haber tocado todas las puntas. Si observamos, las cuerdas de la circunferencia hechas con el hilo describen otra circunferencia (ver foto 6).

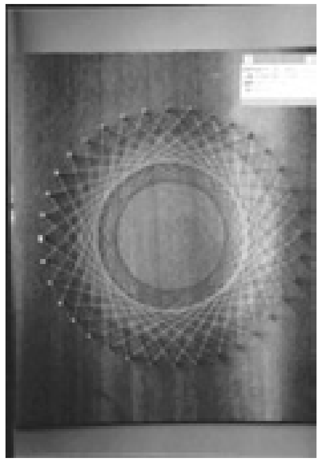

Foto 6. Cuerdas con hilo

- Generación de una circunferencia por papiroflexia

Ahora vamos a generar una circunferencia mediante dobleces en el papel. Dibujamos una circunferencia en un folio y marcamos su centro. Doblamos el folio de forma que el centro caiga sobre la circunferencia y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el centro sobre un punto distinto de la circunferencia. Si observamos, las dobleces marcadas son tangentes de una misma circunferencia, generándose ésta como envolvente de las dobleces (Ver gráfico 2).

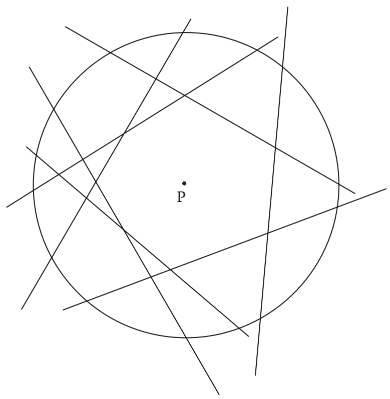

Gráfico 2

- Ángulos y circunferencia

Si en una circunferencia trazamos una cuerda, la circunferencia queda dividida en 2 arcos de circunferencia cada uno de los cuales verifica que el ángulo bajo el que se ve la cuerda, desde cada uno de los puntos de esos arcos, es siempre el mismo (Manuel Fernández 1991).

Si aplicamos la anterior propiedad al contrario y trazamos un segmento cualquiera, todos los puntos desde los que se ve ese segmento bajo un ángulo dado, forman un arco de circunferencia. Para explicar esto de forma manipulable, se ha dibujado un segmento en una tabla y en su comienzo y final se ha clavado una puntilla. Con un alambre se ha formado un ángulo. Si metemos el alambre entre las dos puntillas y marcamos los puntos que describe ese ángulo, nos resulta un arco de circunferencia (ver foto 7).

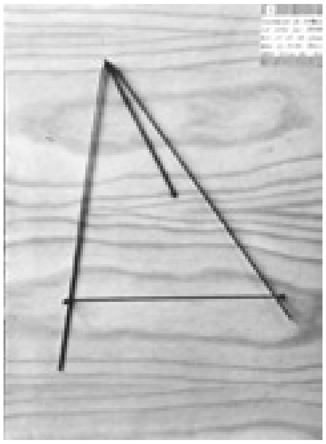

Foto 7. Ángulos y circunferencia

La Elipse
Después de haber generado la elipse como corte de un cono con un determinado plano, la definimos como el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican que la suma de las distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es constante (José M. Arias 1996).

Ahora pasaremos a generar la elipse de dos formas diferentes, utilizando propiedades de ésta.

- Método del jardinero

Para dibujar una elipse por el método del jardinero lo primero que hacemos es tomar una cuerda cuyos extremos ataremos a dos clavos. Clavaremos los clavos en el suelo o en una madera a una distancia de separación inferior a la longitud de la cuerda. Los puntos del plano hasta los que llega la cuerda cuando esté tirante son puntos de la elipse de focos situados en los clavos y cuyo eje focal mide la longitud de la cuerda (Daniel Santos 1995) (ver gráfico 3).

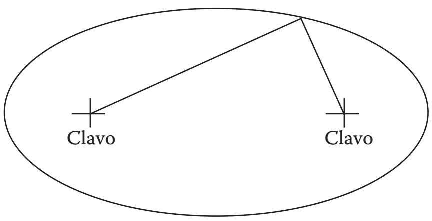

Gráfico 5

- Generación de una elipse por papiroflexia

Ahora vamos a generar una elipse mediante dobleces en el papel. Dibujamos una circunferencia en un folio y marcamos su centro y un punto P en el interior. Doblamos el folio de forma que el punto P caiga sobre la circunferencia y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto P sobre un punto distinto de la circunferencia. Si observamos la dobleces marcadas son tangentes de una misma elipse, generándose ésta como envolvente de las dobleces. Los focos de esta elipse son el centro de la circunferencia y el punto P (ver gráfico 4).

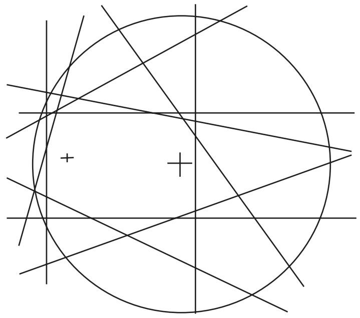

Gráfico 4

La Parábola
Tras haber generado la parábola como corte de un cono con un determinado plano, la definimos como el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un recta fija, que es llamada directriz, y de un punto fijo llamado foco.

Procedemos ahora a generar la parábola de dos formas diferentes:

- Método del jastre

Consideremos una parábola cualquiera. Trazamos las rectas r y s tangentes a la parábola desde el punto O de corte de la directriz con el eje. Estas rectas tocan a la parábola en los puntos P_r y P_s respectivamente. Si tomamos un punto Q de la parábola, entre P_r y P_s, y trazamos la tangente a la parábola por el punto Q, esta recta corta a las rectas r y s en dos puntos Q_r y Q_s. Verificándose que:

$$d(P_r,Q_r)=d(Q_s,O) \text{ y } d(Q_r,O)=d(Q_s,P_s)$$

Utilizando esta propiedad vamos a construir una parábola como envolvente de sus tangentes. Dibujamos dos rectas r y s secantes en un punto O. A partir de O y en la misma dirección trazamos puntos a una distancia constante sobre la recta r e igual sobre la recta s, por ejemplo 20 puntos. Unimos el último punto de r con el primero de s, el penúltimo de r con el segundo de s, y así sucesivamente hasta pasar por todos los puntos. Todas las rectas trazadas al unir estos puntos son tangentes de una misma parábola (Daniel Santos 1995).

Si el método descrito lo realizamos sobre una madera, clavando en cada punto una puntilla y unimos las puntillas con un hilo según se ha descrito; se observa claramente la figura de la parábola (ver foto 8).

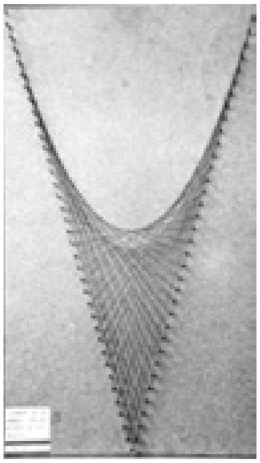

Foto 8. Parábola e hilos

- Generación de una parábola por papiroflexia

Vamos a generar una parábola mediante dobleces en el papel. Dibujamos una recta en un folio y marcamos un punto *P* que no esté en la recta. Doblamos el folio de forma que el punto *P* caiga sobre la recta y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto *P* sobre un punto distinto de la recta. Si observamos las dobleces marcadas, son tangentes de una misma parábola, generándose ésta como envolvente de las dobleces, siendo el foco de esta parábola el punto *P* (ver gráfico 5).

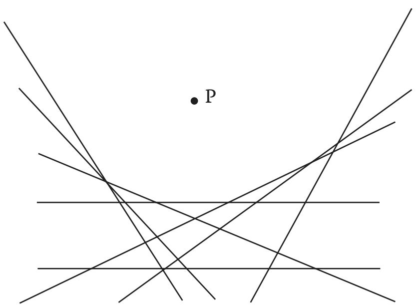

Gráfico 5

La Hipérbola
Definimos la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es constante (José M. Arias 1996).

- Generación de una hipérbola por papiroflexia

Vamos a generar una hipérbola mediante dobleces en el papel. Dibujamos una circunferencia en un folio, marcamos su centro y un punto *P* en el exterior de la circunferencia. Doblamos el folio de forma que el punto *P* caiga sobre la circunferencia y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto *P* sobre un punto distinto de la circunferencia. Si observamos las dobleces marcadas, son tangentes de una misma hipérbola, generándose ésta como envolvente de las dobleces. Los focos de esta hipérbola son el centro de la circunferencia y el punto *P* (ver gráfico 6).

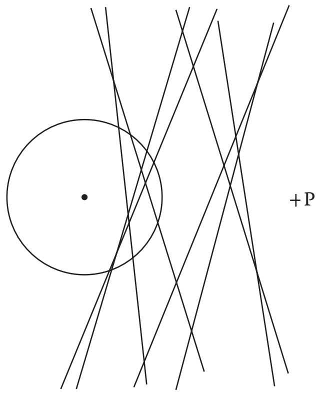

Gráfico 6

El juego de las cónicas
Después de conocer las distintas cónicas y su forma de generación, procederemos a enseñarle a los alumnos algunas propiedades de cada cónica e intentaremos que consigan distinguir cada cónica según sus propiedades y componentes. Esto lo vamos a hacer de forma ociosa a través de un juego.

Construcción del juego
Para construir el juego necesitamos una cartulina blanca, una baraja de 40 cartas, pegamento y rotuladores. Comenzamos echando pegamento en la cara delantera de cada carta y pegándola en la cartulina. Una vez que estén secas, recortamos las cartas de la cartulina, con lo que obtendremos 40 cartas con su parte delantera en blanco.

Ahora, de cada una de las cónicas propondremos 10 propiedades y en cada una de las cartas realizaremos un dibujo que esté relacionado con la propiedad que vayamos a escribir en ella (por ejemplo: para la propiedad tiene un centro podemos dibujar una diana), escribiendo debajo del dibujo dicha propiedad y su número correspondiente. Lo que tenemos ahora es una baraja de cartas de 40 propiedades, cada una de ellas de una cónica distinta. Para cada cónica las propiedades que proponemos son:

- La circunferencia

1 Tiene un centro. 2 Un compás la construye perfectamente. 3 Tiene infinitos ejes de simetría. 4 No tiene focos. 5 Cada punto tiene un radio-vector. 6 Tiene excentricidad 0. 7 Se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una fijo llamado centro. 9 su cónica degenerada es un punto. 10 Todo rayo lanzado desde el centro, al rebotar en la cónica, vuelve a pasar por el centro.

Obteniéndose las cartas de la foto 9.

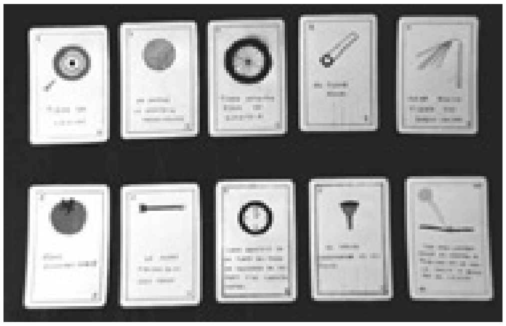

Foto 9. Cartas de la circunferencia

- La elipse

1 Tiene un centro. 2 Tiene cuatro vértices. 3 Tiene dos ejes de simetría. 4 Tiene dos focos. 5 Cada punto tiene dos radio-vectores. 6 Tiene excentricidad entre cero y uno. 7 Se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijo es constantes. 9 Su cónica degenerada es un punto. 10 Todo rayo lanzado desde uno de los focos, al rebotar en la cónica, pasa por el otro foco.

Obteniéndose las cartas de la foto 10.

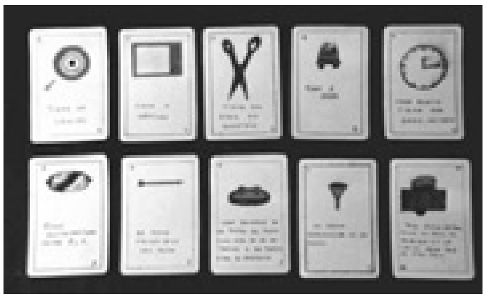

Foto 10. Cartas de la elipse

- La parábola

1 No tiene centro. 2 Tiene un vértice. 3 Tiene un eje de simetría. 4 Tiene un foco. 5 Cada punto tiene un radio-vector. 6 Tiene excentricidad uno. 7 Se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. 9 Su cónica degenerada es una recta. 10 Todo rayo lanzado desde el foco, rebota en la cónica con dirección perpendicular a la directriz.

Obteniéndose las cartas de la foto 11.

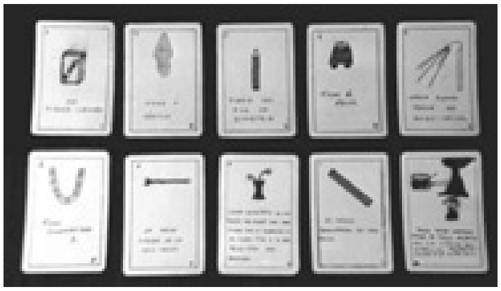

Foto 11. Cartas de la parábola

- La hipérbola

1 Tiene un centro. 2 Tiene cuatro vértices. 3 Tiene dos ejes de simetría. 4 Tiene dos focos. 5 Cada punto tiene dos radio-vectores. 6 Tiene excentricidad mayor que uno. 7 No se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constantes 9 Su cónica degenerada es un par de rectas secantes. 10 Todo rayo lanzado desde uno de los focos, al rebotar en la cónica, sale según la dirección que le marca el radio-vector del otro foco.

Obteniéndose las cartas de la foto 12.

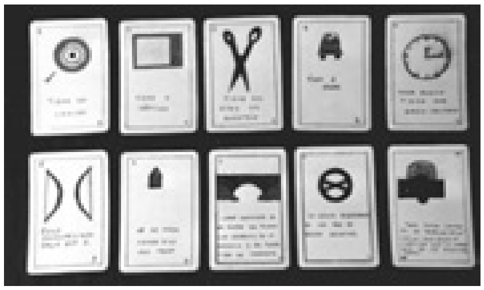

Foto 12. Cartas de la hipérbola

DESARROLLO DEL JUEGO

El desarrollo del juego será el siguiente:

A cada jugador se le reparten 6 cartas, y se queda una de las cartas del montón encima de la mesa de forma que todos puedan verla. El montón, con las restantes cartas se queda encima de la mesa boca abajo. Ahora comienza la ronda de descartaciones, empezando el jugador que esté a la derecha del que ha repartido. Este jugador puede optar entre tomar la carta que hay encima de la mesa o tomar la primera carta del montón. Una vez observadas las siete cartas, descartará una de ellas, que colocará boca arriba encima de las que hubiese ya encima de la mesa. Cuando se terminen las cartas del montón, se tomarán las que haya encima de la mesa, se barajarán y se volverá a hacer un nuevo montón con ellas.

El juego finalizará una vez que uno de los jugadores haya reunido las seis cartas de la misma cónica (siendo éste el vencedor) o después de haber dado tres vueltas al montón, en cuyo caso ganará el jugador que mayor puntuación obtenga al sumar los puntos que indican las cartas concernientes a la cónica que estuviera coleccionando.

En este juego pueden participar de 2 a 6 jugadores ambos inclusive y es un juego que merece la pena que sea construido por los propios alumnos.

Conclusiones

Como conclusión, podemos decir que después de haberlo llevado a la práctica en el aula se han obtenido excelentes resultados observados en los siguientes puntos:

a) Los alumnos son capaces de distinguir unas cónicas de otras señalando sus componentes fundamentales.

b) Conocimiento de la forma de generación de cada una de las cónicas como figuras obtenidas al cortar un cono con un plano en distintas posiciones.

c) Conocimiento comprensivo de la definición de cada cónica como lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una determinada propiedad.

d) Dada una característica o propiedad de cualquiera de las cónicas, distinguir la cónica de que se trate.

e) Dibujo de cada una de las cónicas en unos ejes coordenados a partir de sus elementos de definición.

f) Generación de cada cónica por métodos distintos de cortar un cono con un plano.

g) Utilización de las cónicas en la vida cotidiana para el aprovechamiento de sus propiedades.

h) Distinción de todos los elementos y medidas existentes en cada cónica, así como la influencia que cada uno de ellos tiene en el dibujo de ésta.

i) Interés mostrado por los alumnos en el desarrollo de cada una de las actividades.

Las anteriores actividades propuestas en el tema, han demostrado por sus resultados que el aprendizaje en los alumnos a través de elementos manipulables, hace que los distintos conceptos sean adquiridos por estos de una forma más duradera, ya que siempre podrán relacionar cualquier propiedad con algo que ellos ya han manejado.

Aunque las actividades sólo abarcan el tema de cónicas, siempre podremos recurrir a métodos o aparatos parecidos a los anteriores que tengan relación con los distintos conceptos que se vayan a tratar.

El manejo de algunos de estos aparatos hace que el alumno asimile con mayor interés algunos conceptos y propiedades que antes debía aprender de memoria y desinteresadamente. Esto se demuestra por ejemplo en el juego de las cartas en el que el alumno aprende determinadas propiedades de cada cónica sin ser consciente de ello.

También nos hemos ayudado de los medios tecnológicos puestos a nuestro alcance (el ordenador), con el que los alumnos, ya no sólo ven las cónicas como formas geométricas que cumplen determinadas propiedades, sino que además se hace consciente de que el conocimiento de las partes fundamentales de cada cónica puede conocer todos sus componentes y además dibujarla.

Como habíamos dicho al principio, los conocimientos adquiridos ahora por el alumno le servirán para enfrentarse, sin problemas de razonamiento, a los distintos problemas que se le puedan plantear cuando vuelva a tratarse el tema de cónicas en segundo de bachillerato.

Para aquel que no continúe sus estudios en bachillerato, lo aprendido le servirá para utilizar las cónicas en la vida cotidiana y poder resolver problemas que puedan planteársele. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARIAS, J. M. , CARPINTERO, E. y SANZ F. (1996): *Matemáticas B*, Ed. Casals.

FERNÁNDEZ, M., PADILLA F. J., SANTOS A. L. y VELÁSQUEZ F. (1991): *Circulando por el Círculo*, Ed. Síntesis.

SANTOS D., GARCÍA P., VAZQUEZ C., NEVOT A., GIL, J. y NORTES A. (1995): *Matemáticas 4º ESO*, Ed. Santillana.